3.7) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

El PI canónico de $\mathbb{R}^{2\times 2} \to (A,B) = tr(B^* A)$

a) 1 $(A_1, A_2) = tr(A_2^* A_1) \Rightarrow tr\left(\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \longrightarrow$

como son reales es lo mismo q' A_2^T

$\to = tr\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1+1 = \boxed{2}$

2 $\|A_1\| \Rightarrow \|A_1\|^2 = (A_1, A_1) = tr(A_1^* A_1) = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \to$

$\to = tr\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} = 1+3 = 4 \to \boxed{\|A_1\| = \sqrt{4} = 2}$

3 $\|A_2\| \Rightarrow \|A_2\|^2 = (A_2, A_2) = tr(A_2^* A_2) = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}\right) \to$

$\to = tr\left(\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}\right) = 3+1 = 4 \to \boxed{\|A_2\| = \sqrt{4} = 2}$

(4) $\arccos\left(\frac{(A_1, A_2)}{\|A_1\| . \|A_2\|}\right) = \arccos\left(\frac{2}{2 \cdot 2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$

ANGULO ENTRE
A_1 y A_2
con θ entre 0 y π

b) Busco que dos de sus lados sean ortogonales, por ejemplo, que $A_1 \perp A_2 - \lambda A_1$, es decir:

$$(A_1, A_2 - \lambda A_1) = 0$$

$\to \overline{(A_2 - \lambda A_1, A_1)} = 0 \to$ Como son $\mathbb{R} \to (A_2 - \lambda A_1, A_1) = 0 \to$

$\to (A_2, A_1) - \lambda (A_1, A_1) = 0$

$\to (A_2, A_1) = \lambda (A_1, A_1)$

$\to$ Usando PI canónico:

$\to tr(A_1^* A_2) = \lambda . tr(A_1^* A_1)$ Δ

$\to$ Como $tr(A_1^* A_2) = tr(A_2^* A_1)$ y en a) calculé

$tr(A_2^* A_1)$ y $tr(A_1^* A_1)$

$\to \Delta \to 2 = \lambda . 4 \to \boxed{\lambda = 2}$

Entonces un triángulo rectángulo será el formado por los vértices $\boxed{0, A_1 \text{ y } A_2 - 2A_1}$

. No es único ya que podría tomar que el ángulo recto lo

formen A_1 con $A_2 - \cancel{\lambda} A_1 - A_1$ o A_2 con $A_2 - \cancel{\lambda} A_1 - A_1$ ya que los lados son $A_1, A_2 - \lambda A_1$ y $A_2 - \lambda A_1 - A_1$.

c) Para calcular perímetro y área del triángulo con vértices $O_{\mathbb{R}_{2\times2}}$, A_1, A_2, primero debo saber cuál es la base y la altura (para el área) y también las longitudes de sus lados (para el perímetro).

Los lados serán: $\|A_1\|$, $\|A_2\|$ y $\|A_2-A_1\|$

$\|A_1\|$, por a) es $2 = \|A_2\|$

$\|A_2-A_1\| \rightarrow \|A_2-A_1\|^2 = (A_2-A_1, A_2-A_1) \longrightarrow$

$\rightarrow = (A_2, A_2-A_1) - (A_1, A_2-A_1) \longrightarrow$

Por ser $\mathbb{R}$

$\rightarrow = (A_2-A_1, A_2) - (A_2-A_1, A_1) = (A_2,A_2)-(A_1,A_2)-(A_2,A_1)+(A_1,A_1) \rightarrow$

Por lo calculado en otros ítems:

$\rightarrow = 4-2-2+4 = 4$

Por lo tanto, el perímetro es:

$P = \|A_1\| + \|A_2\| + \|A_2-A_1\| = 2+2+4 = \boxed{8}$ perímetro.

Para el área tomo base $= \|A_1\|$ y altura $= \|A_2\| \cdot \operatorname{sen} \underbrace{\theta(A_1, A_2)}_{\text{Ángulo entre } A_1 \text{ y } A_2}$

Como en a) halle $\theta(A_1, A_2) = \frac{\pi}{3}$, $\|A_1\| = 2$, $\|A_2\| = 2$

$$\to A = \frac{\|A_1\| \cdot \|A_2\| \cdot \operatorname{sen} \theta(A_1, A_2)}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}(\pi/3)}{2} = \boxed{\sqrt{3}}$$

AREA